

# Travail de vacances pour la rentrée 2025 en ECGB2

Version 1

## Vous devez avoir acquis pour la rentrée prochaine :

1. Tout le cours d'ECGB1, chaque définition, chaque propriété.
2. Les exercices de khôlle, ceux des feuilles d'exercices des chapitres, les DST, les DM et les CB.

## Comment s'y prendre ?

### 1. Pour la partie cours :

Posez-vous la question : êtes-vous capable de refaire les exemples du cours, **avec une rédaction irréprochable** ?

Si c'est non, vous savez alors ce qu'il **vous reste à faire** : c'est à la fois un travail d'apprentissage et de rédaction que personne ne peut faire à votre place, et aussi un travail de compréhension profonde

*En analyse : faire des fiches de rédactions types puis les mémoriser.*

*En algèbre : faire des cartes mentales ( schémas heuristiques ) puis les mémoriser.*

### 2. Pour la partie pratique (les exercices) :

De nombreux calculs, exercices ou thèmes sont **fondamentaux et récurrents aux concours**.

Ils ne constituent absolument pas une garantie de réussir les épreuves, mais il s'agit quand même d'un second socle (après celui du cours) constitué des **bases minimales** pour affiner sa compréhension et s'exercer à la rédaction.

*Par exemple, on ne peut concevoir que l'étudiant passe plusieurs minutes à se demander comment il va rédiger la réponse à une question, alors qu'il a déjà rencontré plusieurs fois cette même question auparavant.*

**Ce genre de problème doit être réglé définitivement pendant les vacances.**

Encore une fois, **une rédaction irréprochable est absolument nécessaire**, au risque de froisser le correcteur et de ne pas avoir les points attendus.

Une fois ces bases acquises (mais il faudra y revenir régulièrement), on pourra avancer et aller plus loin. En effet, il ne sert à rien de vouloir toujours faire du neuf si on ne sait plus faire le vieux.

L'étudiant qui ne comprend pas cela est condamné à redécouvrir sans arrêt ce qu'il a mal appris ou oublié.

*Lorsque vous faites un exercice faites **un effort de mémorisation** et de **fichage de la méthode** mise en place pour répondre à des questions classiques ou récurrentes.*

*Repérez, dans la formulation des questions, les termes qui doivent vous guider vers telle ou telle méthode.*

**Fichez et mémorisez les rédactions types** comme la **réurrence**, les **formules de Taylor**, le **théorème de la bijection**, les **intégrations par parties**, les **changements de variable**, la **preuve d'une implication**, d'une **inclusion**, d'une **égalité**, les **critères de convergence des séries et des intégrales** ,... ( la liste n'est pas exhaustive ! )

### 3. Concrètement

Pour bien faire, je mets ci-dessous quelques-uns de ces exercices et problèmes fondamentaux qui sont à faire pour le stage de rentrée.

L'idéal, pour bien démarrer l'année, serait de maîtriser tous ces exercices ...

Vous devez donc faire au mieux, selon vos capacités, en visant d'abord et avant tout **la qualité plutôt que la quantité** : *il vaut mieux en maîtriser la moitié parfaitement plutôt que tout superficiellement.*

(En cas de problème vous pouvez me contacter par mail : [agnes.sanjose@grandlebrun.com](mailto:agnes.sanjose@grandlebrun.com)).

1/ Analyse page 2

2/ Algèbre page 5

3/ Probabilités page 7

## Analyse

### 1. Généralités :

#### Exercice 1 (Inégalité)

1. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq x + 1$ .
2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], e^{-t^2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ .

#### Exercice 2 (Théorème de la bijection et suite implicite)

On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Soit  $c > 0$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $(E_n) : \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n}$  admet sur  $\mathbb{R}_+^*$  une unique solution que l'on notera  $x_n$ . (Indication : on pourra faire le tableau de variations de  $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ )
2. Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_n)^2 + 2 \ln(x_n) = 2 \ln(n) - \ln(2\pi c^2)$ .
4. En prenant un équivalent de chaque membre de l'égalité obtenue à la question précédente, établir que :  $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n)}$

#### Exercice 3 (Equivalent et limites)

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$  (fixé). Montrer que  $\binom{n}{k}$  est équivalent à  $\frac{n^k}{k!}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
2. En déduire, pour tout  $a \in ]0, 1[$ , les limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} a^n$ .

#### Exercice 4 (Equivalent et théorème de l'encadrement et série)

Dans cet exercice  $x$  désigne un élément de  $]0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que l'on a :  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ .  
b) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que :  $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$ .  
c) En déduire, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, un encadrement de  $S_n$ .  
d) Démontrer que  $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ .

### 2. Informatique.

- a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):  
    k=1  
    s=1  
    while s<a:  
        k=k+1  
        s=s+1/k  
    return k
```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

b) Le code suivant : 

```
from numpy import exp
exp(49)
```

 renvoie : 1.9073465724950998e+21.

Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, x]$ . Simplifier la somme  $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$ .

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ .

c) Démontrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ .

d) En déduire que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  converge, de somme  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ .

## 2. Intégrales

### Exercice 5 (Formule de Taylor)

- Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral entre  $a$  et  $b$  pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Appliquer cette formule entre 0 et 1 à l'ordre 1, avec la fonction  $f$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .
- Calculer :  $\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt$ .

### Exercice 6 (Suite définie par une intégrale)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .

- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ .
- En déduire, à partir d'une conjecture, une expression de  $I_n$  à l'aide de factorielles.
- Déterminer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ .

### Exercice 7 (Suite définie par une intégrale)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$

- a) Justifier la convergence de l'intégrale  $I_n$ .  
b) Calculer  $I_0$

2. Soit  $x \in ]0, 1]$ , on pose  $I_n(x) = \int_x^1 (t \ln(t))^n dt$

a) A l'aide du changement de variable  $u = t^{n+1}$  montrer que  $I_n(x) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \int_{x^{n+1}}^1 (\ln(u))^n du$ .

b) En déduire  $I_n$  en fonction de  $n$  et  $J_n = \int_0^1 (\ln(u))^n du$ .

- Exprimer  $J_n$  en fonction de  $n$  et  $J_{n-1}$ .
- En déduire la valeur de  $I_n$ .

### 3. Séries

#### Exercice 8 (Séries usuelles)

Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme éventuelle.

1. a)  $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{e}\right)^n$     b)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n-1)!}$     c)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^{n-1}}$     d)  $\sum_{n \geq 0} \frac{-3 + 5n}{n!}$
2. a)  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$     b)  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$  (**Remarque à retenir** :  $n^2 = n(n-1) + n$ )

#### Exercice 9 (Formule de Taylor et séries)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \ln(1+x)$ .
2. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3. En déduire la convergence et la somme de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

#### Exercice 10 (Suite-Série-Python)

On considère la suite  $u$  définie par :  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ .

1. a) Compléter la fonction suivante en **Python** permettant de calculer et de renvoyer la valeur du terme  $u_n$

```
def U(n):
    a=0
    b=1
    for k in range(2,n+1):
        c=...
        a=...
        b=...
    if n==... :
        u=a
    else :
        u=b
    return(...)
```

- b) En utilisant la fonction précédente écrire une fonction  $d = D(n)$  qui calcule et renvoie la valeur de la différence  $d_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$  avec  $n$  un entier entré par l'utilisateur.
- c) En utilisant le logiciel **Python (Spyder)**, représenter le nuage des points  $(n, d_n)$  puis faire une conjecture sur la valeur de  $d_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- d) Démontrer cette conjecture.
2. a) Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (nombre d'or).
- b) En déduire que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge et déterminer sa limite.
3. On considère la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$  et on pose pour  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ .
- a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ .
- b) Ecrire une fonction en **Python** nommée **S(n)** permettant de calculer la valeur de  $S_n$ , pour un entier  $n$  donné. (on pourra utiliser la fonction en **Python** **U(n)** de la question 1.)
- Après avoir représenté le nuage des points  $(n, S_n)$  émettre une conjecture sur le comportement de la suite  $(S_n)$ .
- c) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$  converge et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$ .

# Algèbre ( Polynômes, matrices, espaces vectoriels, dimension )

## Exercice 1 (Polynômes de Tchebychev)

On considère la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ .

1. Déterminer  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .
2. Déterminer par récurrence le degré et le coefficient dominant de  $T_n$ .
3. Déterminer la parité de  $T_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer  $T_n(1)$  et  $T_n(-1)$ .
5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

## Exercice 2 (Système "récurrent")

On considère  $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $N = T - 2I_3$

1. Calculer  $N$ ,  $N^2$  et  $N^3$ .
2. En déduire  $T^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
4. Calculer la matrice  $A = PTP^{-1}$ .
5. En déduire grâce à la question 2. une expression de  $A^n$ .
6. En déduire, l'expression en fonction de  $n$  des suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$ ,

$$w_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

## Exercice 3 (Matrices)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique telle que  $S^2 = S$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose  $M(\alpha) = \alpha.I_n + (1 - \alpha).S$ .

1. Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $M(\alpha)$  est symétrique.
2. Montrer que pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha\beta)$ .
3. En déduire que, pour tout  $\alpha \neq 0$ ,  $M(\alpha)$  est une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer  $(M(\alpha))^{-1}$ .
4. On suppose que  $\alpha > 0$  et qu'il existe un vecteur colonne non nul  $X$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $M(\alpha)X = \lambda X$ .  
Démontrer alors que  $\lambda > 0$ . (Pour cette dernière question, on pourra calculer  ${}^t(M(\sqrt{\alpha}).X).(M(\sqrt{\alpha}).X)$ )

**Exercice 4 (Application linéaire et matrices)**

On considère les matrices de  $M_4(\mathbb{R})$ ,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par  $(I, J, K, L)$  et  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

On pose  $A = J + K$ .

- Montrer que  $\beta = (I, J, K, L)$  est une base de  $E$  et donner la dimension de  $E$ .
- Exprimer  $JK$ ,  $KL$  et  $LJ$  en fonction respectivement de  $L$ ,  $J$  et  $K$ .
  - Calculer  $J^2$ ,  $K^2$  et  $L^2$  puis en déduire que:  $KJ = -L$
  - En déduire que:  $\forall (M, N) \in E^2, MN \in E$ .
- Calculer  $A^2$ . En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$ .
- On considère maintenant l'application  $\varphi_A$  qui à toute matrice  $M$  de  $E$  associe:  $\varphi_A(M) = AMA^{-1}$ 
  - Montrer que  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - Déterminer  $\text{Ker}(\varphi_A)$  puis montrer que  $\varphi_A$  est un automorphisme de  $E$ .
- Écrire la matrice  $\Phi_A$  de  $\varphi_A$  dans la base  $\beta = (I, J, K, L)$ .
  - Montrer que  $\beta' = (I, J + K, J - K, L)$  est une base de  $E$  et déterminer  $\text{Mat}_{\beta'}(\varphi_A)$ .
  - Montrer que  $E = \text{Ker}(\varphi_A - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\varphi_A + \text{Id})$

**Exercice 5 (Espace vectoriel en dimension finie)**

On pose dans  $\mathbb{R}^4$ :  $u_1 = (1, 0, 1, -1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1, -2)$ ,  $u_3 = (2, -3, -1, 4)$  et  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ .

- Déterminer une base et la dimension de  $F$ .
- On pose  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 2, 0, 3)$  et  $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .  
Démontrer que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ .
- On pose  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ .  
Démontrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , donner une base et sa dimension.
- Déterminer  $\dim(F + H)$ .

**Exercice 6 (Espace vectoriel de fonctions)**

Dans cet exercice, on admet que l'ensemble  $E$  des fonctions numériques deux fois dérivables est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on note:  $F = \{\varphi \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = (1 + x^2)\varphi(x)\}$ .

- Montrer que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Montrer que si  $(u, v) \in F^2$  alors  $u'v - v'u$  est constante.
- Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$  appartient à  $F$ .
- Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) \int_0^x \frac{1}{(f(t))^2} dt$  appartient à  $F$ .

**Exercice 7 (Espace vectoriel en dimension finie)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et de base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

On dispose d'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par :

$$u(e_1) = e_1 + 5e_2 + 2e_3 \quad u(e_2) = -e_1 + e_2 \quad u(e_3) = e_1 - 7e_2 - 2e_3$$

- Déterminer la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- Déterminer  $u^3$  et en déduire que:  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$  et  $\text{Im}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$
- Démontrer que:  $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2$ .
- Déterminer le rang de  $u$  et en déduire que:  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2)$  et  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2)$

### Exercice 8 (Application linéaire et polynômes)

Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[x]$  par :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[x], (\varphi(P))(x) = xP'(x) - P(x)$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$  et déterminer  $\text{Im}(\varphi)$  et  $\text{rg}(\varphi)$ .
2. En déduire  $\text{Ker}(\varphi)$ .
3. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique.
4. Montrer que  $\text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_n[x]$ .

## Probabilités discrètes

### Exercice 1

Une puce se déplace sur une demi-droite d'origine  $O$  par sauts successifs d'une ou deux unités vers la droite en suivant la procédure suivante :

- Au départ la puce est en  $O$ .
  - Les sauts sont indépendants.
  - À tout instant, la probabilité d'un saut d'une ou deux unités est la même et vaut  $\frac{1}{2}$ .
1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $S_n$  (respectivement  $C_n$ ) la variable aléatoire égale au nombre de sauts d'une unité (respectivement deux unités) au bout de  $n$  sauts.  
Déterminer les lois de  $S_n$  et  $C_n$  ainsi que leur espérance.
  2. On note  $X_n$  la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après  $n$  sauts. Déterminer  $X_n(\Omega)$ .
  3. Déterminer une relation entre  $S_n$ ,  $C_n$  et  $n$ .
  4. Déterminer une relation entre  $S_n$ ,  $C_n$  et  $X_n$ .
  5. En déduire la loi de  $X_n$ .
  6. Déterminer l'espérance et la variance de  $X_n$ .
  7. Soit  $Y_n$  la variable aléatoire égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser le point d'abscisse  $n$ . Déterminer  $Y_n(\Omega)$  en fonction de la parité de  $n$ .
  8. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 2$  et tout entier  $k \geq 1$ ,
$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1)$$

### Problème

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , dans laquelle on effectue une succession de  $(n+1)$  tirages d'une boule avec remise et l'on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. Ainsi, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, la variable  $X_n$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$ .

Par exemple, si  $n = 5$  et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2,  $\boxed{2}$ , 4, 3, alors  $X_5 = 4$ .  
Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  on note  $N_k$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu au  $k$ -ième tirage.

### Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que  $n = 3$ . L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

*Pensez à modéliser par un arbre pondéré faisant intervenir les  $N_k$ .*

1. a) Exprimer l'événement  $[X_3 = 4]$  à l'aide d'événements faisant intervenir les variables  $N_1, N_2, N_3$ .  
En déduire  $P(X_3 = 4)$ .  
b) Montrer que  $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$ , et en déduire  $P(X_3 = 3)$ .
2. Calculer l'espérance de  $X_3$ .

## Partie II : Cas général

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , reconnaître la loi de  $N_k$  et rappeler son espérance et sa variance.
2. Calculer  $P(X_n = n+1)$ .
3. Montrer, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :  $P_{[N_1=i]}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$ .
4. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que  $P(X_n = 2) = \frac{n+1}{2n}$ .
5. Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .
  - a) Justifier l'égalité d'événements suivante :  $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$ .
  - b) En déduire que  $P(X_n > k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$ . ( *Indication pensez au dénombrement* )
  - c) Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour  $k = 0$  et pour  $k = 1$ .
6. Exprimer, pour tout  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ ,  $P(X_n = k)$  à l'aide de  $P(X_n > k-1)$  et de  $P(X_n > k)$ .
7. En déduire que :  $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$ . Puis que  $E(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
8. Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ ,  $P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$ .  
( *Indication : pensez à utiliser les formules de Pascal et «sans nom»* )

## Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 2}$ .

1. Soit  $k$  un entier fixé supérieur ou égal à 2.
  - a) Montrer que  $\binom{n+1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$
  - b) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$ .
2. Montrer que la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$  converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire  $Z$  à valeurs dans  $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

On admet aussi que  $Z$  admet une espérance si la série de terme général  $kP(Z = k)$  est convergente.

Dans ce cas, l'espérance de  $Z$  est :  $E(Z) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(Z = k)$

3. a) Montrer que  $Z$  admet une espérance et la calculer.
- b) Comparer  $E(Z)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$ .